UNIVERSITÀ DI MILANO

PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA
N. 4

CESARINA TIBILETTI

L'evoluzione della geometria secondo le idee di Klein.

Estratto dal *Periodico di Matematiche.*
Serie IV - Vol. XXVIII (1950), pp. 13-27.

MILANO
Anno 1950

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Febbraio 1950 - Serie IV, vol. XXVIII, n. 1 (pagg. 13-27)

L'evoluzione della geometria secondo le idee di Klein (*)

F. KLEIN nelle sue celebri *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, Programma pubblicato in occasione dell'ingresso nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'Università di Erlangen, 1872 (comunemente indicato con il nome di Programma di Erlangen) (¹), per la prima volta ha rilevato il significato profondo della evoluzione della Geometria.

Noi qui mostreremo la suggestiva visione indicata dal Programma di Erlangen con una certa libertà rispetto alla esposizione originale, ampliandone alcuni aspetti, anche in relazione ai successivi sviluppi della Geometria, ed omettendo alcune parti che non sembrano assolutamente necessarie per comprenderne lo spirito. Nella nostra esposizione cercheremo soprattutto di notare come la interpretazione di KLEIN dell'evoluzione della Geometria porti essenzialmente alla precisazione del concetto di uguaglianza e ciò perchè questo fatto ci appare ora come uno dei risultati più notevoli delle idee del programma di Erlangen.

L'elemento fondamentale su cui si impernia l'interpretazione di KLEIN è il concetto di gruppo di operazioni e risulta opportuno premettere un breve cenno su di esso.

(*) Questo articolo riproduce sostanzialmente una conferenza tenuta dall'A. al «Gruppo per lo studio della fisica» della Soc. Montecatini di Milano.

(¹) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Program zum Eintritt in die philosophische Facultät etc., Erlangen 1872, ripubblicato con aggiunte in «Mathem. Annalen.» 43 Bd. (1893), pag. 63; tradotto da G. FANO in «Annali di Matem. pura e applicata», serie II, t. XVII (1890), pag. 307.

Si dice che un insieme, finito o infinito, di operazioni forma un *gruppo* [1] quando gode delle seguenti proprietà: il prodotto di due operazioni dell'insieme è ancora un'operazione dell'insieme, l'inversa di un'operazione dell'insieme è un'operazione dell'insieme (di conseguenza ad ogni gruppo appartiene l'operazione identica).

Ogni gruppo Γ contenuto in un gruppo G (e non coincidente con G) è detto *sottogruppo* proprio di G.

1. - Geometria Euclidea.

Consideriamo la *Geometria euclidea metrica* riferendoci per es. al piano. Qualunque sia la sua organizzazione e il suo sviluppo logico-deduttivo, in essa due figure si considerano uguali quando differiscono solo per il posto che occupano. Ora due figure F ed F' (del piano) uguali in questo senso, appaiono come quelle per cui esiste un movimento (rotazione, traslazione e loro prodotti [2]) o una simmetria speculare o una operazione prodotto di queste che porta la figura F nella figura F'.

Per es. in geometria euclidea metrica due cerchi aventi lo stesso raggio sono uguali; è ovvia in questo caso l'esistenza di un movimento (che qui è semplicemente una traslazione) il quale porta un cerchio sull'altro.

L'insieme dei movimenti e delle simmetrie speculari (sempre nel piano) forma un gruppo che indichiamo con G_M.

Allora la geometria euclidea appare come quella geometria che considera uguali due figure quando sono trasformabili l'una nell'altra mediante un'operazione del gruppo G_M; questa geometria descrive e precisa le varie configurazioni, oggetto di studio da parte di essa, proprio mediante le loro caratteristiche geometriche che si mantengono invariate per le operazioni del gruppo G_M [3].

---

[1] Cfr. per es. L. Bianchi: *Teoria dei gruppi di sostituzioni ecc.*, Pisa Spoerri, 1900, e W. Burnside: *Theory of Groups etc.*, Cambridge, 1911.

[2] Ricordiamo che tutti i movimenti si possono ottenere come prodotto di rotazioni. Anche la traslazione può interpretarsi infatti come prodotto di due opportune rotazioni.

[3] Da questo punto di vista il teorema che afferma che un triangolo con due angoli uguali ha anche due lati uguali si può enunciare come segue: Quando esiste un movimento che muta il triangolo ABC in sè

Anzi notiamo che le grandezze invarianti che si considerano vengono create proprio attraverso il gruppo G_M: per es., lunghezza di un segmento AB non è altro che il concetto astratto individuato dalla classe di tutti i segmenti trasformati di AB per le operazioni di G_M; analogamente si può introdurre il concetto di ampiezza di angolo.

Per descrivere un triangolo, in questa geometria, si danno lunghezze di lati e ampiezze di angoli che sono appunto grandezze invarianti per le operazioni di G_M. Pertanto si può dire che *la geometria euclidea metrica* (del piano) *appare come quella che studia le caratteristiche geometriche* [1] *delle figure che sono invarianti per le operazioni del gruppo* G_M.

Considerazioni analoghe si possono ripetere per lo spazio ma qui, come in seguito, trattiamo soprattutto del piano; infatti il riferirsi allo spazio sarebbe un'estensione inutile ai fini di una comprensione dello spirito del Programma di Erlangen e anzi non farebbe altro che complicare l'esposizione.

In geometria euclidea si considera un'altra « sorta di uguaglianza » (meglio, un'altra relazione egualiforme): la similitudine fra figure. Ora due figure simili (nel piano) sono tali che si può passare dall'una all'altra mediante prodotti di movimenti ed omotetie cioè mediante similitudini.

Per es. due cerchi qualsiansi sono sempre simili: si trova subito l'esistenza di una similitudine, che qui è semplicemente una omotetia, la quale fa passare dall'uno all'altro.

L'insieme delle similitudini (nel piano) forma un gruppo di operazioni che indichiamo con G_S (questo gruppo viene detto da Klein: *Hauptgruppe*).

Chiamiamo *Geometria euclidea simile* (nel piano) la geometria che considera uguali due figure simili, cioè trasformabili l'una nell'altra mediante una operazione del gruppo G_S, e, analogamente a quanto si è affermato per la geometria euclidea metrica, si può dire che *la geometria euclidea simile è quella che studia le caratteristiche geometriche delle figure che sono invarianti per le operazioni del gruppo* G_S.

---

portando un angolo A in un'altro angolo B, esiste anche un movimento (lo stesso) che muta il triangolo in sè portando un suo lato (AC) in un altro (BC).

[1] Notiamo che con la dicitura « caratteristiche geometriche » traduciamo il « geometrische Eigenschaften » di Klein: nella traduzione citata di G. Fano la stessa locuzione è resa con « proprietà geometriche ».

Per es., in geometria euclidea simile un triangolo viene descritto dando rapporti di lati e ampiezze di angoli che sono appunto grandezze invarianti per le operazioni del gruppo G_S.

2. - Geometria projettiva.

Consideriamo ora la comune *Geometria projettiva* del piano: due figure in essa si considerano uguali quando si può passare dall'una all'altra mediante una omografia.

Così in geometria projettiva un cerchio e una conica qualsiasi sono uguali perchè esiste sempre un'omografia che muta l'uno nell'altra. Per la stessa ragione sono uguali due generiche quaterne di punti del piano, due terne di punti allineati; sono invece diverse due quaterne di punti allineati, generiche (che non abbiano lo stesso birapporto).

Le omografie del piano formano un gruppo G_p e allora, come nei casi precedenti, *la geometria projettiva* (del piano) *si può riguardare come la geometria che studia le caratteristiche geometriche delle figure* (del piano) *che sono invarianti per le operazioni del gruppo* G_p *delle omografie.*

Si possono considerare, insieme alle omografie nel piano anche le reciprocità (che mutano il piano punteggiato nel piano rigato) e cioè tutte le projettività [1] e pensare eguali due figure quando si può passare dall'una all'altra mediante una generica projettività. Da questo punto di vista un cerchio è uguale ad una qualsiasi conica luogo o inviluppo, una terna di punti allineati è uguale anche ad una qualsiasi terna di rette concorrenti in un punto.

L'insieme G_P delle projettività forma un gruppo e si può considerare una geometria projettiva più ampia caratterizzata da questo gruppo G_P (gruppo projettivo) anzichè dal suo sottogruppo G_p delle omografie, come è indicato sopra.

---

(1) I nomi usati, *omografia, reciprocità* e *projettività* nel piano, ove co[n] projettività si indica l'insieme delle omografie e reciprocità, seguono un[a] nomenclatura molto diffusa, cfr. per es. G. CASTELNUOVO (*Lezioni di Geometria Analitica*, Albrighi e Segati, 1938) e A. COMESSATTI (*Lezioni di Geometria analitica e projettiva*, Padova, Cedam 1929).

3. - Sottogruppi del gruppo projettivo: Geometrie subordinate.

Vediamo ora, attraverso alcuni esempi, come si possono considerare delle geometrie caratterizzate da sottogruppi del gruppo projettivo.

a) Anzitutto il ***gruppo*** G_S ***delle similitudini*** relativo alla *Geometria euclidea simile* del piano, è un sottogruppo del gruppo G_p delle omografie. Precisamente il gruppo G_S delle similitudini si presenta come il sottogruppo delle operazioni di G_p che lasciano ferma come insieme *la coppia dei punti ciclici* o (il che è lo stesso) l'insieme dei cerchi del piano ([1]).

In quanto il gruppo G_S della geometria euclidea simile è un sottogruppo del gruppo G_p della geometria projettiva si dice, con Klein, che la geometria euclidea simile è subordinata alla geometria projettiva.

Notiamo inoltre che due figure F ed F', uguali in geometria simile, in geometria projettiva si presentano come quelle per cui esiste una omografia (operazione di G_p) che porta la figura F e la coppia dei punti ciclici rispettivamente nella figura F' e nella coppia dei punti ciclici.

In relazione a questo fatto si può affermare che le caratteristiche geometriche degli enti E considerate nella geometria euclidea simile sono caratteristiche geometriche considerate dalla geometria projettiva ma per gli enti E' ottenuti associando ordinatamente agli E l'ente V dato dalla coppia dei punti ciclici.

Considerazioni analoghe si possono fare nello spazio ove pure la geometria euclidea simile appare subordinata a quella projettiva, avendo per gruppo il sottogruppo delle omografie che lasciano fermo *il cerchio assoluto* (conica all'infinito comune a tutte le sfere ([2])).

([1]) La seconda caratterizzazione, con l'uso dei cerchi, può apparire più opportuna quando si pensi alla geometria del piano dei punti reali (cioè, fissato un riferimento, aventi coordinate date da numeri reali). Tuttavia qui, come in seguito, potremo senz'altro pensare alla geometria del piano dei punti complessi (cioè aventi coordinate date da due numeri complessi).

([2]) Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali omogenee x_1, x_2, x_3, x_4, il cerchio assoluto risulta definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Anche la *Geometria euclidea metrica* (nel piano per es.) caratterizzata, come si è già indicato sopra, dal gruppo G_M dei movimenti e delle simmetrie speculari, risulta subordinata alla *Geometria euclidea simile*: il suo gruppo G_M, infatti, è un sottogruppo del gruppo delle similitudini, precisamente quello costituito dalle similitudini che lasciano fermo *l'insieme* V *dei cerchi con uno stesso raggio* (1).

b) Nel gruppo delle projettività (del piano) notiamo *il sottogruppo delle affinità*, cioè delle projettività che lasciano ferma *la retta impropria* e consideriamo uguali due figure (del piano) che siano trasformabili l'una nell'altra mediante un'affinità. Da questo punto di vista un cerchio è uguale ad una qualsiasi ellisse (2), un quadrato ad un qualsiasi parallelogramma; un quadrato invece è sempre diverso da un trapezio.

Chiamiamo *Geometria affine* quella che considera questa uguaglianza; essa è caratterizzata dal gruppo delle affinità e risulta subordinata alla geometria projettiva.

Analogamente a quanto si è detto in *a*), le caratteristiche geometriche degli enti *E* rilevate dalla geometria affine possono considerarsi come caratteristiche geometriche rilevate dalla geometria projettiva ma per gli enti *E'* ottenuti associando ordinatamente agli enti *E* l'ente *V* dato dalla retta impropria.

Tale geometria affine a sua volta contiene come subordinata la *Geometria equiaffine* caratterizzata dal sottogruppo delle affinità aventi *rapporto* 1 (3). Poichè queste particolari affinità

---

(1) Questo gruppo G_M si lascia caratterizzare anche diversamente: esso può apparire come quello delle similitudini a modulo 1, oppure come quello che muta in sè l'espressione $x^2 + y^2 = 0$, senza alterarne il primo membro di un fattore numerico. Dal punto di vista projettivo, e in modo più significativo, esso può essere caratterizzato anche in uno dei due modi seguenti:

1°) Come il gruppo delle projettività che ammette quali operazioni elementari generatrici le omologie armoniche del piano che ne scambiano i punti ciclici, cioè i ribaltamenti;

2°) Come il gruppo delle projettività del piano, ciascuna delle quali gode della proprietà di essere trasformata nella propria inversa da un'omologia armonica scambiante i punti ciclici (per queste due ultime caratterizzazioni, v. O. CHISINI: *Il gruppo delle congruenze del piano nella geometria projettiva*, « Periodico di Matematiche », vol. XV (1935), pag. 133).

(2) E anche ad una qualsiasi iperbole quando si considerino pure affinità con equazioni a coefficienti immaginari.

(3) In ogni affinità è costante il *rapporto* delle aree corrispondenti.

mantengono le aree, tale geometria considera le aree fra le proprietà che caratterizzano le figure.

c) Consideriamo ancora il sottogruppo delle projettività piane dato dalle *omografie che mutano in sè una qualsiasi conica assegnata* C (detta fondamentale) e la geometria che tratta le caratteristiche geometriche delle figure che sono invarianti per le operazioni di questo sottogruppo [1].

Tra le caratteristiche geometriche considerate da questa geometria le più notevoli sono il birapporto formato da due punti qualsiasi di una retta con le intersezioni tagliate da questa sulla conica C, e quello di due rette per un punto P e le tangenti da P alla conica C.

Si verifica che la geometria euclidea metrica (del piano) rientra in questo tipo di geometria come caso limite: la sua conica fondamentale C diventa, come luogo, la retta impropria contata due volte, come inviluppo, la coppia dei punti ciclici.

d) Ricordiamo un ultimo esempio che ha importanza per le sue applicazioni nella fisica moderna.

Consideriamo uno spazio S_4 e in esso le omografie che lo mutano in sè. Fissato in S_4 un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con x, y, z, t coordinate non omogenee di un generico punto, sia V la quadrica intersezione dell' S_3 all' infinito di S_4 con l' ipercono $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ (analogo al cono $x^2+y^2+z^2=0$, che nello spazio ordinario taglia il cerchio assoluto sul piano improprio).

Consideriamo ora le omografie di S_4 che lasciano ferma V e fra esse in particolare quelle che non alterano neppure di un fattore numerico il primo membro della equazione $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$: queste ultime formano un sottogruppo del gruppo delle omografie detto *gruppo di* LORENTZ.

Si può pensare ad una geometria legata a questo gruppo: in essa risultano invarianti le equazioni fondamentali della elettrodinamica secondo MAXWELL.

Dagli esempi ora illustrati appare quanto segue.

---

(1) Questa geometria risulta quella non euclidea ellittica quando si consideri una conica C reale e si pensino punti del piano solo quelli interni alla conica C (conica di KLEIN). Cfr. per es. F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, p. I, vol. II, art. XI: A. BONOLA: *Sulla teoria delle parallele e sulla geometria non euclidea*, § 23 e segg., pag. 351, Bologna, Zanichelli 1925.

In corrispondenza ad ogni sottogruppo Γ del gruppo G_p delle omografie (nel piano per es.) si può pensare ad una geometria caratterizzata dal gruppo Γ, subordinata alla geometria projettiva.

Questa geometria legata al gruppo Γ può essere considerata anche diversamente quando il sottogruppo Γ sia visto come l'insieme delle operazioni di G_p che lasciano fermo un certo ente V (appartenente alla classe degli enti su cui opera G_p). Precisamente: le caratteristiche geometriche di un ente E trattate dalla geometria collegata al gruppo Γ possono apparire come le caratteristiche geometriche trattate dalla geometria projettiva, legata al gruppo G_p, ma per l'ente E' costituito associando ordinatamente gli enti E e V.

Gli esempi sopra ricordati sono stati considerati anche da questo punto di vista e nei vari casi è stato pure indicato l'ente V corrispondente.

4. - Ampliamento delle geometrie.

Nel paragrafo precedente si è mostrato come da una geometria (per es. la projettiva) si possono dedurre altre geometrie caratterizzate da sottogruppi del gruppo relativo alla geometria da cui si è partiti. Ora si può pensare ad un procedimento inverso, cioè partire da una certa geometria caratterizzata da un gruppo G di trasformazioni, ampliare il gruppo G e considerare una geometria caratterizzata da questo gruppo ampliato.

Di ciò diamo un primo esempio, riportato da KLEIN nel suo Programma, ma di ben lunga più importanti per lo sviluppo della geometria sono le estensioni che tratteremo nei due paragrafi successivi.

Consideriamo, nel piano per es., il gruppo G_S delle similitudini, relativo alla geometria euclidea simile e ampliamolo aggiungendovi le trasformazioni per raggi vettori reciproci (inversioni circolari) (1).

Si ottiene un nuovo gruppo G_I che contiene G_S come sottogruppo. Si dimostra, tra l'altro, che questo gruppo G_I è dato

---

(1) Ricordiamo la definizione elementare di tali trasformazioni (del piano): fissato un centro O e una costante k, ad un punto P del piano si fa corrispondere un punto P' allineato con O e P per cui $OP \cdot OP' = k$. Tali trasformazioni sono biunivoche (con eccezioni) e godono della proprietà di essere omocicliche ed isogonali.

da tutte e sole le trasformazioni biunivoche del piano che mutano in sè l'insieme dei cerchi e delle rette.

Si può considerare allora la geometria che rileva le caratteristiche geometriche delle figure invarianti per le operazioni del gruppo G_I; questa geometria è chiamata da KLEIN *Geometria dei raggi vettori reciproci*.

Poichè le trasformazioni di G_I conservano gli angoli, una delle caratteristiche geometriche delle figure considerate da questa geometria è appunto l'ampiezza degli angoli.

La geometria dei raggi vettori reciproci risulta un ampliamento della geometria euclidea simile, la quale appare allora caratterizzata dal sottogruppo (G_S) delle operazioni di G_I che mutano in sè la varietà V delle rette del piano.

5. - Geometria algebrica.

Illustriamo ora l'importante ampliamento della geometria projettiva dato dalla *Geometria algebrica*.

Riferiamoci sempre al piano, considerato come insieme di punti reali e complessi; in esso sia fissato un sistema di coordinate (per es. cartesiane ortogonali) e siano x, y le coordinate di un punto P ed x', y' le coordinate del punto P' ad esso corrispondente in una certa trasformazione. Quando questa trasformazione è una omografia il legame fra le coordinate di P e P', come è noto, è il seguente

$$x' = \frac{\varphi_1}{\chi_1}, \qquad y' = \frac{\psi_1}{\chi_1}$$

ove φ_1, ψ_1, χ_1 sono generici polinomi lineari in x e y (¹).

Badando a questa rappresentazione analitica delle projettività (²) e ricordando che le projettività sono delle trasformazioni biunivoche, appare naturale considerare come loro estensione quelle trasformazioni del piano che siano rappresentate da equazioni

$$x' = \varphi(xy) \qquad y' = \psi(xy), \tag{1}$$

(¹) Ricordiamo che il determinante dei coefficienti di φ_1, ψ_1, χ_1, deve essere diverso da zero affinchè la corrispondenza sia effettivamente biunivoca.

(²) Omografie se x' e y' sono concepite, come qui, quali coordinate di punti e reciprocità quando siano concepite quali coordinate di rette.

con φ e ψ funzioni razionali di x e y, tali che da esse si possano ricavare x e y come funzioni razionali di x' e y' (1).

Queste trasformazioni vengono dette *trasformazioni birazionali.*

Un esempio di esse è dato dalla trasformazione per raggi vettori reciproci considerata nel paragrafo precedente (2).

Particolare caso notevole di trasformazioni birazionali è quello delle *trasformazioni quadratiche,* per cui le equazioni (1) sono del tipo

$$x' = \frac{\varphi_2}{\chi_2} \qquad y' = \frac{\psi_2}{\chi_2} \tag{2}$$

ove φ_2, ψ_2, χ_2 sono polinomi di secondo grado in x e y, opportuni affinchè le (2) siano razionalmente invertibili rispetto ad x e y.

Si dimostra che ogni trasformazione birazionale è uguale al prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche (3); pertanto le trasformazioni quadratiche risultano essere le generatrici dell'insieme delle trasformazioni birazionali.

Ora l'insieme delle trasformazioni birazionali del piano forma un gruppo: il gruppo Cremoniano G_C. Chiamiamo geometria algebrica, del piano, quella che considera le caratteristiche geometriche delle figure che sono invarianti per le trasformazioni (birazionali) del gruppo G_C.

Con questo ampliamento la geometria projettiva del piano (punteggiato, per es.) si può considerare come quella relativa al sottogruppo delle trasformazioni del gruppo Cremoniano che lasciano ferma la varietà V delle rette.

Considerazioni analoghe valgono per lo spazio e in generale per uno spazio lineare qualsiasi.

---

(1) Cfr. per es. ENRIQUES e CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* vol. III, L. V, cap. II, § 20, pag. 156, Zanichelli, Bologna; *Enciclopedia delle matematiche elementari,* vol. II, p. 2ª, art. XXIX, O. CHISINI: *Geometria elementare e matematiche superiori,* pag. 517, § 3, Hoepli, Milano 1938.

(2) Quando si ponga l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali nel centro O (cfr. nota (1) a pag. 20) le equazioni della trasformazione per raggi vettori reciproci sono

$$x' = \frac{kx}{x^2 + y^2} \qquad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}.$$

(3) Cfr. ENRIQUES e CHISINI: *Teoria ecc.,* l. c. vol. III, L. V, cap. II. § 20, pag. 164 e segg.

Accanto alle trasformazioni birazionali fra spazi lineari (per es. fra piani) si possono considerare trasformazioni birazionali fra gli elementi di due varietà qualsiansi, per es. due curve, due superficie, ecc., cioè trasformazioni biunivoche, espresse da funzioni razionali, fra gli elementi delle due varietà stesse.

Per es., data una quartica gobba Q di prima specie siano K una quartica piana projezione di Q da un punto generico dello spazio e K' una cubica piana projezione di Q da un punto di Q: fra le due curve K e K' si può considerare la trasformazione che muta l'uno nell'altro i punti che sono projezione di uno stesso punto della quartica Q. Questa trasformazione è un esempio di trasformazione birazionale fra due curve.

Anche le trasformazioni birazionali che portano una varietà in un'altra (eventualmente coincidente con la prima) formano gruppo.

Ora con estensione di altro tipo, si può pensare, invece che a geometrie su varietà lineari, a geometrie su varietà qualsiasi: curve, superficie, ecc. e in particolare, in relazione alle trasformazioni birazionali, si avranno una geometria algebrica sulla curva, una geometria algebrica sulla superficie, ecc.

Allora si potrà chiamare geometria algebrica in una varietà W qualsiasi quella che considera le caratteristiche geometriche degli enti di W che rimangono invariate per le operazioni del gruppo delle trasformazioni birazionali entro W.

Ricordiamo che in geometria algebrica l'ordine di una curva algebrica non è una caratteristica invariante, lo sono invece per es. il genere [1] di una curva algebrica (numero essenzialmente intero positivo o nullo), i moduli di una curva algebrica [2] (numeri questi complessi, variabili con continuità).

Così accade che in geometria algebrica sono uguali un cerchio ed una cubica piana con un punto doppio (che hanno lo stesso genere zero); sono pure uguali due cubiche senza punti doppi

---

[1] Il genere di una curva algebrica piana di ordine n si può definire, nel modo più accessibile, ma anche meno significativo, come il numero p dato da

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - k$$

ove δ e k sono rispettivamente il numero dei punti doppi e delle cuspidi.

[2] Cfr., per es. Enriques e Chisini: *Teoria geom. ecc.*, l. c. vol. III, L. V, cap. III, § 33, pag. 355 e segg.

con ugual modulo (che qui è il birapporto delle quattro tangenti altrove uscenti da un punto qualsiasi della cubica); non sono invece uguali una cubica con punto doppio e una cubica senza punti doppi (che hanno generi diversi).

6. - Topologia.

Si può ancora ampliare il gruppo delle trasformazioni birazionali, e avere, in corrispondenza, una nuova geometria a cui sia subordinata la geometria algebrica, usando le *trasformazioni continue.*

Due varietà, concepite per es. come luogo di punti, si dicono in corrispondenza biunivoca e continua quando le coordinate di un punto dell'una si possono esprimere mediante funzioni univoche e continue del corrispondente punto dell'altra; l'operazione che così fa passare dall'una all'altra varietà si dice trasformazione continua od omeomorfismo [1].

La più generale trasformazione di questo tipo non è data da funzioni di carattere analitico; negli esempi più comuni però, essa può scindersi in un insieme di trasformazioni analitiche, operanti ciascuna su una parte degli enti in esame.

Per es. consideriamo (v. fig. 1) un cerchio e un quadrato concentrici con centro in O e la trasformazione che porta un punto P del cerchio in un punto P' del quadrato, essendo P e P' allineati con O e dalla stessa parte rispetto ad O stesso. Questa trasformazione è una trasformazione continua la quale può rappresentarsi analiticamente per ciascuno dei quattro quadranti AB, BC, CD, DA.

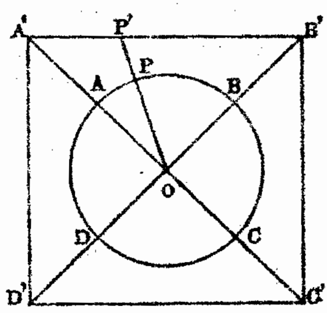

Fig. 1.

È importante notare che una trasformazione continua fra due varietà W e W' lascia inalterata la relazione di vicinanza, cioè muta l'intorno di un punto P di W nell'intorno del punto corrispondente P' di W' cioè, più preci-

(1) Cfr. per es. Enriques e Chisini: *Teoria geom. ecc.*, l. c. vol. I, L. II, p. 2ª, art. XXIX; Severi: *Conferenze di Geometria algebrica*, Roma 1927, 1928; *Enciclopedia delle matematiche elementari*, vol. II°, p. 2ª, art. XXIX; O. Chisini: *Geometria elementare e matematiche superiori*, l. c, §§ 3, 4, 5.

samente, se un insieme di punti A di W ha per punto limite il punto P, l'insieme dei punti A' di W', trasformati degli A, ha per punto limite il punto P' (corrispondente di P) di W'.

Tali trasformazioni continue contengono, evidentemente, come caso particolare le precedenti trasformazioni birazionali.

Le trasformazioni continue che operano su una certa varietà (per es. sul piano) formano un gruppo il quale può caratterizzare una geometria su quella varietà. Tale geometria, che considera le caratteristiche geometriche invarianti per il gruppo delle trasformazioni continue, viene detta *Topologia* o *Analysis situs*.

Ricordiamo che sono figure topologicamente equivalenti un cerchio e un quadrato, un cerchio ed una qualsiasi linea chiusa, una sfera ed una piramide; non lo sono invece una sfera e un toro (anello).

Sono caratteristiche geometriche che considera la Topologia: la connessione delle superficie, il fatto che cicli e superficie siano unilateri o bilateri, la omologia e l'equivalenza di cicli su una superficie, ecc. (1).

7. - L'evoluzione della geometria. Il concetto di uguaglianza.

Dopo quanto è stato illustrato si può in generale affermare ciò che segue.

Dati: *a*) una varietà W di elementi che potremo chiamare punti,

b) un insieme di operazioni, effettuate su tali punti, che costituiscano un gruppo G,

è sempre possibile costruire una geometria che considera le caratteristiche generiche degli enti, formati coi punti di W, le quali siano invarianti per le operazioni del gruppo G.

Inoltre, una qualsiasi geometria riguardante una varietà W con gruppo G, può ammettere delle geometrie subordinate relative ad ogni sottogruppo Γ del gruppo G.

Le caratteristiche geometriche delle figure considerate dalla geometria a gruppo G sono pure considerate dalla geometria

(1) Cfr. nota (1) a pag. 24.

a gruppo Γ; quest'ultima però considera anche delle caratteristiche di cui non si occupa la prima geometria perchè non invarianti per tutte le operazioni di G.

Se poi si definisce Γ come il sottogruppo di G che lascia fermo un ente V di W, le caratteristiche geometriche degli enti E di W considerate dalla geometria relativa a Γ possono apparire come caratteristiche geometriche trattate dalla geometria relativa al gruppo G, ma per gli enti E' costituiti associando ordinatamente gli enti E e V.

Alla luce degli esempi dati e delle considerazioni generali indicate vale la pena fare un riassunto dell'evoluzione della geometria secondo Klein, riferendosi alla varietà W data dai punti del piano (o dello spazio).

In essa si possono considerare i seguenti gruppi di trasformazioni, ciascuno sottogruppo del successivo (senza però che ciascuno di essi sia sottogruppo massimo nel precedente).

I) Il gruppo dei movimenti e delle simmetrie speculari,
II) Il gruppo delle similitudini,
III) Il gruppo delle trasformazioni projettive,
IV) Il gruppo delle trasformazioni birazionali,
V) Il gruppo delle trasformazioni continue.

Corrispondentemente si hanno le seguenti cinque geometrie;

I) Geometria euclidea metrica,
II) Geometria euclidea simile,
III) Geometria projettiva,
IV) Geometria algebrica,
V) Topologia o Analysis situs.

Notiamo che quando si passa da una geometria alla geometria successiva, più ampia, si estende la classe delle figure uguali ad una data: per es., come si è visto, un cerchio in geometria euclidea metrica è uguale solo ai cerchi che hanno il suo stesso raggio, in geometria euclidea simile è uguale a tutti i cerchi, in geometria projettiva a tutte le coniche, in geometria algebrica a tutte le curve razionali, in topologia a un qualsiasi circuito chiuso.

D'altra parte passando da una geometria alla successiva diminuisce il numero delle caratteristiche geometriche delle figure che vengono considerate: per es. basta pensare al cerchio di cui si danno tante proprietà in geometria euclidea e di cui si può dire solo che è un circuito chiuso in topologia.

Però le caratteristiche geometriche considerate dalle geometrie più ampie risultano più importanti e profonde.

Concludendo, si può dire che per le successive geometrie il contenuto va diminuendo ma ciò che rimane è più importante ed essenziale.

Ed infine notiamo come la interpretazione di KLEIN dell'evoluzione della geometria porti essenzialmente ad una precisazione del concetto di uguaglianza.

Nella geometria euclidea metrica due figure sono uguali se differiscono solo per il posto: si è notato che questo fatto equivale a dire che il passaggio dall'una all'altra si può realizzare con un'operazione del gruppo dei movimenti e simmetrie speculari. Tali operazioni sono delle particolari trasformazioni ed è allora naturale pensare di sostituire ad esse altri tipi di trasformazioni.

Come si è visto, con queste estensioni si ottengono delle nuove geometrie per ciascuna delle quali due figure sono uguali se si può passare dall'una all'altra con una trasformazione del gruppo che si considera.

In generale, comunque si introduca una relazione egualiforme in geometria, di fianco ad essa si trova sempre un gruppo G di trasformazioni e due figure risultano uguali secondo la relazione in esame quando si possono mutare l'una nell'altra con una trasformàzione del gruppo G (1).

CESARINA TIBILETTI

---

(1) Per queste ed altre considerazioni sull'uguaglianza cfr. O. CHISINI: *Discorso sull'eguaglianza*, « Rend. Sem. Matem e Fisica » di Milano, vol. XIV (1940), pag. 68.